PRELEGEREA 3
STATICA STRUCTURILOR CU ZĂBRELE

3.1 Elemente şi ansambluri structurale

Elementul structural zăbrea (sau bara dublu articulată) este elementul structural cu o dimensiune geometrică mult mai mare decât celelalte două, lungimea L, cu aria secţiunii transversale, constantă, A, constituit dintr-un material caracterizat de modulul de elasticitate, constant, E, la care deplasările extremităţilor şi forţele corespunzătoare se manifestă după direcţia axei longitudinale (figura 3.1).

Pentru studiul deformării elastice a elementului structural zăbrea se definesc parametrii proprii d_1, d_2, f_1, f_2, raportaţi la reperul propriu reprezentat prin axa x dispusă longitudinal elementului (figura 3.1).

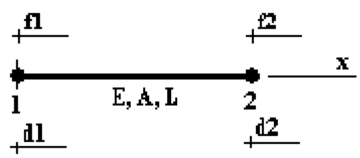

Figura 3.1 Element structural zăbrea în sistemul de axe propriu *x*

Ecuaţia matriceală de echilibru static a elementului structural zăbrea, stabilită prin metodele staticii structurilor, este dată de relaţia 3.1.1a,

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

sau în exprimare matriceală, compactă, de forma: (3.1.1a)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

unde: $[ke]$ este matricea de rigiditate a elementului structural zăbrea raportată la parametrii proprii d_1, d_2, f_1, f_2;

$\{d\}$ - vectorul deplasărilor extremităţilor elementului structural zăbrea sau parametrilor principali proprii d_1, d_2;

$\{f\}$ - vectorul forţelor care acţionează la extremităţile elementului structural zăbrea sau parametrilor secundari proprii f_1, f_2.

Structurile cu zăbrele se pot organiza după o direcţie (puţin interesante), dar, de cele mai multe ori, după două direcţii (în plan, figura 3.2) şi după trei direcţii (în spaţiu).

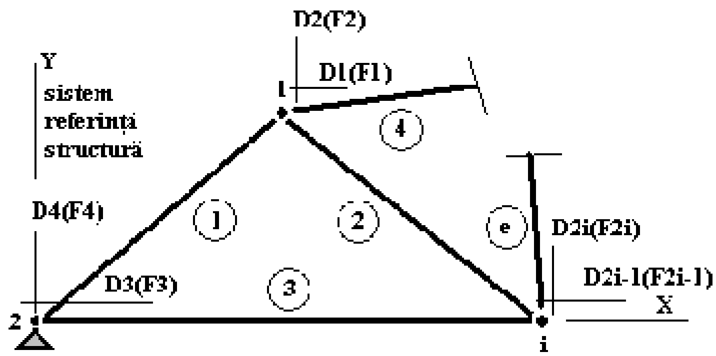

Figura 3.2 Structură plană cu elemente structurale zăbrea în sistemul de axe structural *XY*

Pentru fiecare nod *i* al unei structuri plane cu zăbrele se definesc câte doi parametri principali, D_{2i-1} şi D_{2i}, primul fiind translaţie după prima axă a reperului structurii (obişnuit *X*) şi al doilea translaţie după cea de a doua axă a reperului structurii (obişnuit *Y*); pentru o structură cu *n* noduri se definesc *2n* parametri principali. Parametrii secundari sunt forţele care acţionează la nodurile structurii F_{2i-1} şi F_{2i}; pentru o structură cu *n* noduri se definesc *2n* parametri secundari. Parametrii sunt pozitivi dacă vectorii ce îi definesc au acelaşi sens cu sensul pozitiv al axei cu care sunt paraleli. Din aceste considerente ecuaţia matriceală de echilibru mecanic a structurii plane conţine *2n* ecuaţii.

Din necesitatea asigurării compatibilităţii deplasărilor extremităţilor zăbrelei cu deplasările nodurilor de conectare ale structurii plane, elementul structural zăbrea capătă deplasări şi forţe fictive la extremităţi, pe direcţia transversală axei longitudinale, *y*, (figura 3.3), ecuaţia matriceală de echilibru static raportată la parametrii proprii fiind dată de relaţia 3.1.1b.

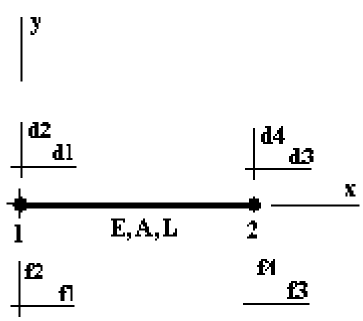

Figura 3.3 Element structural zăbrea în sistemul propriu *x,y*

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \tag{3.1.1b}$$

Pentru fiecare nod *i* al unei structuri spaţiale cu zăbrele se definesc câte trei parametri principali D_{3i-2}, D_{3i-1} şi D_{3i}, primul fiind translaţie după prima axă a reperului structurii (obişnuit *X*), al doilea translaţie după a doua axă a reperului structurii (obişnuit *Y*) şi al treilea translaţie după a treia axă a reperului structurii (obişnuit *Z*); pentru o structură cu *n* noduri se definesc *3n* parametri principali. Parametrii secundari sunt forţele care acţionează la nodurile structurii F_{3i-2}, F_{3i-1} şi F_{3i};

pentru o structură cu *n* noduri se definesc *3n* parametri secundari. Din aceste considerente ecuaţia matriceală de echilibru mecanic a structurii spaţiale conţine *3n* ecuaţii.

Din necesitatea asigurării compatibilităţii deplasărilor extremităţilor zăbrelei cu deplasările nodurilor de conectare ale structurii spaţiale, elementul structural zăbrea capătă deplasări şi forţe fictive la extremităţi şi pe cea de a doua axă transversală axei longitudinale, *z*, ecuaţia matriceală de echilibru static raportată la parametrii proprii fiind dată de relaţia 3.1.1c.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \tag{3.1.1c}$$

3.2 Statica matriceală clasică pentru analiza structurilor plane cu zăbrele

3.2.1 Ecuaţiei matriceală de echilibru static a elementului structural zăbrea

Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru elementul structural zăbrea, *e*, al unei structuri cu zăbrele plane cu *n* noduri, implică parcurgerea unui proces etapizat.

Etapa 1.1. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii proprii, cu proiectarea acestora în sistemul de referinţă propriu *xy* (în această etapă notaţiile utilizează minuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii proprii elementului însoţite de *e* pentru indicarea apartenenţei la elementul structural curent), relaţia E1.1,

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

sau (E1.1)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

Etapa 1.2. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii structurali aferenţi elementului curent *e* ($De_{2i-1}, De_{2i}, De_{2j-1}, De_{2j}$, Fe^{e}_{2i-1}, Fe^{e}_{2i}, Fe^{e}_{2j-1}, Fe^{e}_{2j}), cu proiectarea acestora în sistemul de referinţă unic *XY* (în această etapă notaţiile utilizează majuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii structurii aferenţi elementului *e* iar *e*-indice superior pentru fracţiunea de participare a elementului curent la ansamblul structural), relaţia E1.2,

$$\begin{bmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,3} & Ke_{1,4} \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,3} & Ke_{2,4} \\ Ke_{3,1} & Ke_{3,2} & Ke_{3,3} & Ke_{3,4} \\ Ke_{4,1} & Ke_{4,2} & Ke_{4,3} & Ke_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} De_{2i-1} \\ De_{2i} \\ De_{2j-1} \\ De_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fe^e_{2i-1} \\ Fe^e_{2i} \\ Fe^e_{2j-1} \\ Fe^e_{2j} \end{Bmatrix}$$

sau (E1.2)

$$[Ke] \cdot \{De\} = \{Fe^e\}$$

Parametrii proprii ai extremităţilor elementului structural plan zăbrea sunt proiectaţi pe direcţiile parametrilor structurali aferenţi ai nodurilor de conectare, cu ajutorul matricei de transformare prin rotire, *T*, care are ca elemente componente cosinuşii directori ai axelor proprii (*x* şi *y*) definiţi funcţie de reperul structurii (*XY*). În cazul structurilor plane cu elemente structurale zăbrea matricea de transformare prin rotire este de forma:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

unde: α este unghiul măsurat, în sens pozitiv, de la axa de referinţă *X* către axa de referinţă *x* (antiorar).

Matricea *T* este o matrice ortogonală şi are proprietatea că inversa coincide cu transpusa:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

Relaţiile de legătură dintre parametrii proprii şi parametrii structurali aferenţi sunt:

$$\{d\} = [T] \cdot \{De\} \qquad \{f\} = [T] \cdot \{Fe^e\}$$

care, înlocuite în relaţia E1.1 şi operat corespunzător, conduc la stabilirea matricei de rigiditate a elementului structural zăbrea plan raportată la parametrii structurali aferenţi elementului *e*:

$$[Ke] = [T]^T \cdot [ke] \cdot [T]$$

În cazul structurilor spaţiale cu elemente structurale zăbrea, matricea de transformare prin rotire este de forma:

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ -\dfrac{c_x c_y}{s} & s & -\dfrac{c_y c_z}{s} \\ -\dfrac{c_z}{s} & 0 & \dfrac{c_x}{s} \end{bmatrix}$$

unde: c_x, c_y, c_z sunt cosinuşi directori;

$s = \sqrt{c_x^2 + c_z^2}$.

Etapa 1.3. Stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static prin raportare la parametrii structurii, obţinută prin completarea cu ecuaţii fictive corespunzătoare parametrilor structurii ce nu sunt aferenţi sau nu aparţin elementului structural zăbrea (în această etapă notaţiile utilizează majuscule pentru componentele matricei de rigiditate raportate la parametrii structurii şi *e*-indice superior pentru fracţiunea de participare a elementului curent *e* la ansamblul structural):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K^e_{1,1}} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \boldsymbol{K^e_{1,2n}} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \boldsymbol{K^e_{2n,1}} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \boldsymbol{K^e_{2n,2n}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{D_{2n}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F^e_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{F^e_{2n}} \end{Bmatrix}$$

sau (E1.3)

$$\left[K^e\right] \cdot \left\{D\right\} = \left\{F^e\right\}$$

unde: $\left[K^e\right]$ este matricea de rigiditate a elementului structural zăbrea raportată la parametrii structurii (fracţiune a matricei de rigiditate a structurii);

$\left\{D\right\}$ - vectorul deplasărilor nodurilor structurii sau parametrilor principali ai structurii $D_1 \ldots D_{2n}$;

$\left\{F^e\right\}$ - fracţiunea vectorului forţelor nodurilor structurii sau parametrilor secundari ai structurii $F_1^e \ldots F_{2n}^e$.

3.2.2 Analiza statică a structurii plane cu zăbrele

Enunţarea problemei: să se efectueze analiza statică a structurii plane cu zăbrele (determinarea deplasărilor nodurilor, forţelor din reazeme şi solicitărilor/eforturilor din elementele structurale), caracteristicile geometrice şi mecanice, precum şi schema statică şi încărcările fiind precizate pe figura 3.4.

Rezolvarea problemei: aplicaţia utilizează notaţii pentru variabile şi operatori corespunzând programului de calcul matematic Mathcad (simbolul := are înţelesul de atribuire).

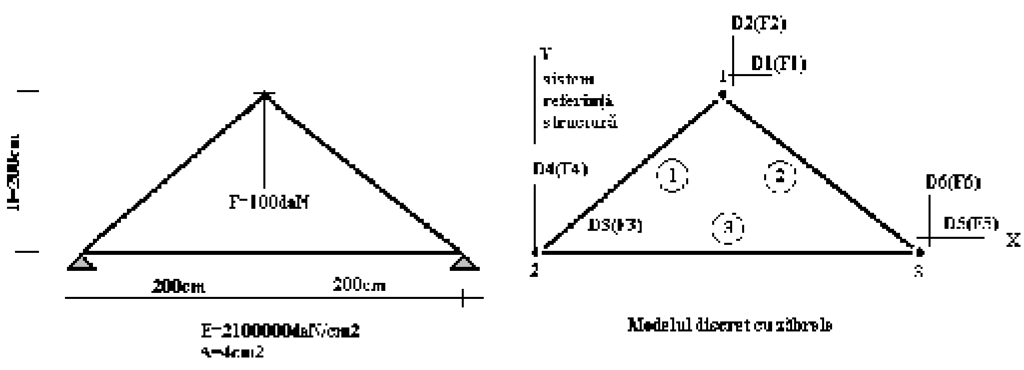

Figura 3.4 Structura plană cu zăbrele şi modelul discret corespunzător

Etapa 1, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru fiecare zăbrea:

Elementul zăbrea 1 (figura 3.5.1)

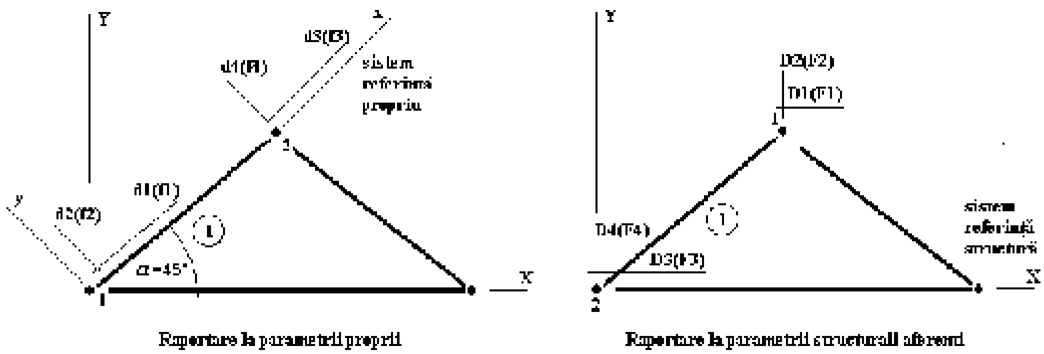

Figura 3.5.1 Parametrii şi sistemul de referinţă pentru elementul zăbrea 1

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii elementului

$$ke1 := \left(\frac{E \cdot A}{H \cdot \sqrt{2}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ke1 = \begin{pmatrix} 29698.485 & 0 & -29698.485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -29698.485 & 0 & 29698.485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurii aferenţi elementului

$$\alpha := \frac{\pi}{4} \qquad T1 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad k1 := T1^{T} \cdot ke1 \cdot T1$$

$$k1 = \begin{pmatrix} 14849.242 & 14849.242 & -14849.242 & -14849.242 \\ 14849.242 & 14849.242 & -14849.242 & -14849.242 \\ -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 \\ -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurii

$$K1 := \begin{pmatrix} k1_{3,3} & k1_{3,4} & k1_{3,1} & k1_{3,2} & 0 & 0 \\ k1_{4,3} & k1_{4,4} & k1_{4,1} & k1_{4,2} & 0 & 0 \\ k1_{1,3} & k1_{1,4} & k1_{1,1} & k1_{1,2} & 0 & 0 \\ k1_{2,3} & k1_{2,4} & k1_{2,1} & k1_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 14849.242 & 14849.242 & -14849.242 & -14849.242 & 0 & 0 \\ 14849.242 & 14849.242 & -14849.242 & -14849.242 & 0 & 0 \\ -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 & 0 & 0 \\ -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementul zăbrea 2 (figura 3.5.2)

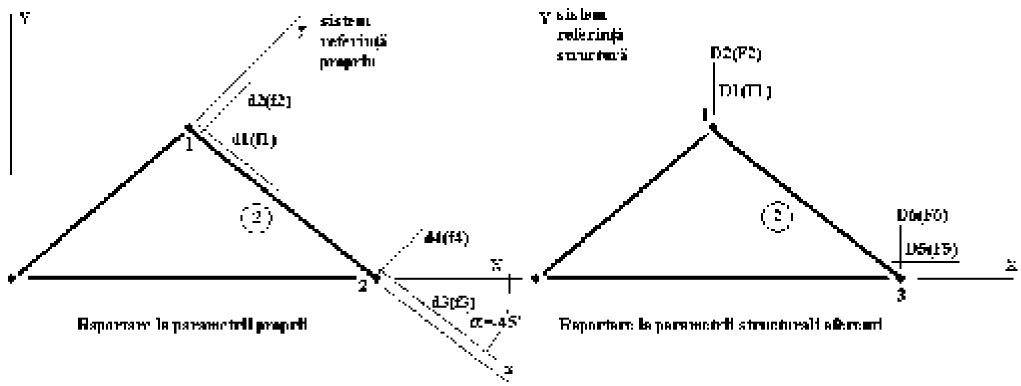

Figura 3.5.2 Parametrii şi sistemul de referinţă pentru elementul zăbrea 2

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii elementului

$$ke2 := \left(\frac{E\cdot A}{H\cdot\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ke2 = \begin{pmatrix} 29698.485 & 0 & -29698.485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -29698.485 & 0 & 29698.485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurii aferenţi elementului

$$\alpha := \frac{-\pi}{4} \qquad T2 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad k2 := T2^{T}\cdot ke2\cdot T2$$

$$k2 = \begin{pmatrix} 14849.242 & -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 \\ -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 & -14849.242 \\ -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 & -14849.242 \\ 14849.242 & -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurii

$$K2 := \begin{pmatrix} k2_{1,1} & k2_{1,2} & 0 & 0 & k2_{1,3} & k2_{1,4} \\ k2_{2,1} & k2_{2,2} & 0 & 0 & k2_{2,3} & k2_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k2_{3,1} & k2_{3,2} & 0 & 0 & k2_{3,3} & k2_{3,4} \\ k2_{4,1} & k2_{4,2} & 0 & 0 & k2_{4,3} & k2_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 14849.242 & -14849.242 & 0 & 0 & -14849.242 & 14849.242 \\ -14849.242 & 14849.242 & 0 & 0 & 14849.242 & -14849.242 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14849.242 & 14849.242 & 0 & 0 & 14849.242 & -14849.242 \\ 14849.242 & -14849.242 & 0 & 0 & -14849.242 & 14849.242 \end{pmatrix}$$

Elementul zăbrea 3 (figura 3.5.3)

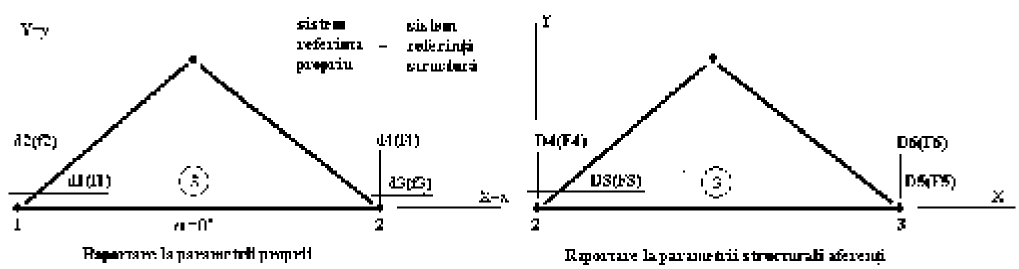

Figura 3.5.3 Parametrii şi sistemul de referinţă pentru elementul zăbrea 3

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii elementului

$$ke3 := \left(\frac{E \cdot A}{2 \cdot H}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ke3 = \begin{pmatrix} 21000 & 0 & -21000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21000 & 0 & 21000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurii aferenţi elementului

$$\alpha := 0 \qquad T3 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha 3) & \sin(\alpha 3) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha 3) & \cos(\alpha 3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha 3) & \sin(\alpha 3) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha 3) & \cos(\alpha 3) \end{pmatrix} \qquad Ke3 := T3^{T} \cdot ke3 \cdot T3$$

$$k3 = \begin{pmatrix} 21000 & 0 & -21000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21000 & 0 & 21000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurii

$$K3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k3_{1,1} & k3_{1,2} & k3_{1,3} & k3_{1,4} \\ 0 & 0 & k3_{2,1} & k3_{2,2} & k3_{2,3} & k3_{2,4} \\ 0 & 0 & k3_{3,1} & k3_{3,2} & k3_{3,3} & k3_{3,4} \\ 0 & 0 & k3_{4,1} & k3_{4,2} & k3_{4,3} & k3_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21000 & 0 & -21000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21000 & 0 & 21000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 2, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static a structurii:

$$K := K1 + K2 + K3$$

$$K = \begin{pmatrix} 29698.485 & 0 & -14849.242 & -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 \\ 0 & 29698.485 & -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 & -14849.242 \\ -14849.242 & -14849.242 & 35849.242 & 14849.242 & -21000 & 0 \\ -14849.242 & -14849.242 & 14849.242 & 14849.242 & 0 & 0 \\ -14849.242 & 14849.242 & -21000 & 0 & 35849.242 & -14849.242 \\ 14849.242 & -14849.242 & 0 & 0 & -14849.242 & 14849.242 \end{pmatrix} \qquad |K| = 0$$

Etapa 3, introducerea condiţiilor la limită (cl):

$$Kcl := \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{pmatrix} \qquad Kcl = \begin{pmatrix} 29698.485 & 0 \\ 0 & 29698.485 \end{pmatrix} \qquad |Kcl| = 882000000$$

$$Fcl := \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Etapa 4, determinarea deplasărilor necunoscute (nec):

$$Dnec := \text{lsolve}(Kcl, Fcl) \qquad Dnec = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

- generarea vectorului deplasărilor:

$$D := \begin{pmatrix} Dnec_1 \\ Dnec_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.003 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etapa 5 (auxiliară), determinarea forţelor din reazeme:

$$Fnec3 := K^{\langle 3 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec3 = (50) \qquad Fnec4 := K^{\langle 4 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec4 = (50)$$

$$Fnec5 := K^{\langle 5 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec5 = (-50) \qquad Fnec6 := K^{\langle 6 \rangle^T} \cdot D \qquad Fnec6 = (50)$$

- generarea vectorului forţelor:

$$F := \begin{pmatrix} Fcl_1 \\ Fcl_2 \\ Fnec3_1 \\ Fnec4_1 \\ Fnec5_1 \\ Fnec6_1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 50 \\ 50 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Etapa 6 (auxiliară), determinarea eforturilor din elementele structurale:

Elementul zăbrea 1

$$D1 := \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \qquad fe1 := ke1 \cdot T1 \cdot D1 \qquad fe1 = \begin{pmatrix} 70.711 \\ 0 \\ -70.711 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elementul zăbrea 2

$$D2 := \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \qquad fe2 := ke2 \cdot T2 \cdot D2 \qquad fe2 = \begin{pmatrix} 70.711 \\ 0 \\ -70.711 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elementul zăbrea 3

$$D3 := \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \qquad fe3 := ke2 \cdot T3 \cdot D3 \qquad fe3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Stabilirea prin MEF - formularea directă a ecuaţiei matriceale de echilibru static - cu raportare la parametrii proprii pentru elementul finit plan tip zăbrea

În MEF, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibrului static raportată la parametrii proprii elementului, pentru elementul finit zăbrea, implică un proces de calcul etapizat.

Etapa 1.1.1. Identificarea problemei.

Fie elementul (structural/finit) zăbrea de lungime *L*, caracterizat de aria secţiunii transversale, constantă *A*, şi modulul de elasticitate, constant *E*, cu axa proprie *x* orientată pozitiv de la extremitatea *1* către extremitatea *2*, deplasările şi forţele manifestându-se la extremităţile sale (figura 3.6).

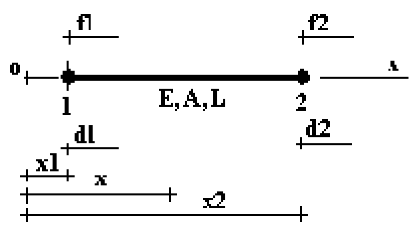

Figura 3.6 Definirea elementului (structural/finit) zăbrea

Problema constă în găsirea, în sistemul de referinţă propriu elementului, a unei relaţii între vectorul parametrilor proprii principali, constituit cu deplasările extremităţilor elementului zăbrea $\{d\}$, şi vectorul parametrilor proprii secundari, constituit cu forţele corespunzătoare $\{f\}$, de forma dată de relaţia E1.1.1.

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\} \qquad \text{(E1.1.1)}$$

Etapa 1.1.2. Găsirea funcţiei, convenabile, de aproximare a deplasării în secţiunea curentă, *d(x)*.

Se face ipoteza că pe toată lungimea elementului zăbrea deplasarea *d(x)* este dată de o funcţie cu variaţie liniară (polinomială), care, matriceal, este de forma dată de relaţia E1.1.2

$$\{d(x)\} = \{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x\} = [1 \quad x] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

sau compact, de forma: (E1.1.2)

$$\{d(x)\} = [\Phi(x)] \cdot \{\alpha\}$$

unde: $[\boldsymbol{\Phi(x)}]$ este matricea funcţiei de aproximare;

α_i sunt coordonatele generalizate ale deplasării.

Etapa 1.1.3. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deplasărilor în secţiunea curentă, *d(x)*, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului zăbrea, $\{d\}$.

Se face afirmaţia că relaţia E1.1.2 este valabilă inclusiv în extremităţile elementului zăbrea şi aceasta se poate scrie simultan matriceal:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d(x_1) \\ d(x_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{\alpha\}$$

de unde rezultă:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{d\}$$

care prin înlocuire în relaţia E1.1.2 conduce la relaţia E1.1.3

$$\{d(x)\} = [\Phi(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\} = [N_1(x) \quad N_2(x)] \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = N_1(x) \cdot d_1 + N_2(x) \cdot d_2$$

sau compact: (E1.1.3)

$$\{d(x)\} = [N(x)] \cdot \{d\}$$

unde: $N_1(x)$, $N_2(x)$ sunt funcţiile de formă ale elementului (finit) tip zăbrea (aferente parametrilor principali), egale cu:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{-x_1 + x}{L}$$

sau, pentru cazul în care originea sistemului de referinţă propriu se alege în extremitatea 1 ($x_1=0$, $x_2=L$), egale cu:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

Funcţiile de formă sunt funcţii de pondere, având proprietatea de a lua valoare maximă (unitară) în extremitatea în care acţionează parametrul principal aferent şi valoare minimă (zero) în extremitatea opusă; suma tuturor funcţiilor de formă are valoare unitară.

În implementarea pe calculator a programelor bazate pe metoda elementului finit este importantă exprimarea funcţiei deplasărilor prin intermediul funcţiilor de formă.

Etapa 1.1.4. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deformaţiei specifice în secţiunea curentă, $\varepsilon(x)$, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului tip zăbrea, $\{d\}$.

Se pleacă de la definiţia deformaţiei specifice pentru zăbrea, relaţia E1.1.4:

$$\{\varepsilon(x)\} = \left\{\frac{\partial d(x)}{\partial x}\right\} = \left\{\frac{\partial([N(x)]\cdot\{d\})}{\partial x}\right\} = \left[\frac{\partial[N(x)]}{\partial x}\right]\cdot\{d\} = \left[\frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2(x)}{\partial x}\right]\cdot\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

sau compact: (E1.1.4)

$$\{\varepsilon(x)\} = [B]\cdot\{d\}$$

unde:

$$[B] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]$$

Etapa 1.1.5. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul eforturilor în secţiunea curentă, $\{\sigma(x)\}$, şi vectorul deplasărilor extremităţilor elementului tip zăbrea, $\{d\}$.

Se pleacă de la definiţia deformării elastice pentru zăbrea, relaţia E1.1.5:

$$\{\sigma(x)\} = \{E\cdot\varepsilon(x)\} = [D]\cdot[B]\cdot\{d\}$$

sau compact: (E1.1.5)

$$\{\sigma(x)\} = [H]\cdot\{d\}$$

unde $[D]$ este matricea caracteristicilor mecanice a elementului tip zăbrea;
$[H]$ - notaţia consacrată a produsului $[D]\cdot[B]$.

Etapa 1.1.6. Stabilirea relaţiei matriceale dintre vectorul deplasărilor extremităţilor elementului tip zăbrea, $\{d\}$, şi vectorul forţelor corespunzătoare, $\{f\}$.

Se pleacă de la definiţia lucrului mecanic, exprimarea în deplasări virtuale (aplicat întregului volum al elementului tip zăbrea), pentru cel interior:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_{int}} &= \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon^*(x)}\}^{\boldsymbol{T}}\cdot\{\boldsymbol{\sigma(x)}\}\cdot \boldsymbol{dV} = \\ &= \int_V \left(\{\boldsymbol{d^*}\}^{\boldsymbol{T}}\cdot[\boldsymbol{B}]^{\boldsymbol{T}}\right)\cdot\left([\boldsymbol{D}]\cdot[\boldsymbol{B}]\cdot\{\boldsymbol{d}\}\right)\cdot \boldsymbol{dV} = \\ &= \{\boldsymbol{d^*}\}^{\boldsymbol{T}}\cdot\left(\boldsymbol{A}\cdot\int_L [\boldsymbol{B}]^{\boldsymbol{T}}\cdot[\boldsymbol{D}]\cdot[\boldsymbol{B}]\cdot \boldsymbol{dx}\right)\cdot\{\boldsymbol{d}\} \end{aligned}$$

respectiv exterior:

$$L_{ext} = d_1^*\cdot f_1 + d_2^*\cdot f_2 = \{d^*\}^T\cdot\{f\}$$

şi se impune egalitatea lor, pentru existenţa echilibrului static ($L_{int} = L_{ext}$).

După egalarea celor doi termeni şi efectuarea simplificărilor (considerând că nu toate deplasările virtuale sunt egale cu zero) se obţine relaţia E1.1.6

$$\left(A \cdot \int_L [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dl \right) \cdot \{d\} = \cdot \{f\}$$

sau compact: (E1.1.6)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

ceea ce coincide cu relaţia E1.1.1 şi care trebuia găsită.

Integrala ce defineşte matricea de rigiditate poate fi rezolvată fie aproximativ, prin integrare numerică după o direcţie, fie exact (şi în această situaţie este posibil), prin înlocuirea termenilor şi efectuarea operaţiilor indicate, în final obţinându-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Ecuaţia de echilibru static de mai sus este identică cu cea cunoscută din statica matriceală clasică (3.1.1a). În felul acesta elementul structural plan tip zăbrea a devenit *element finit tip zăbrea*, din categoria elementelor finite unidimensionale (*1D*).